Exercício 13 (capítulo 6 do livro): O tempo que um aluno despende por dia no facebook tem distribuição exponencial com média 2 horas. Seleccionaram-se 5 dias ao acaso tendo-se observado o tempo despendido no facebook em cada um deles.

(a) Calcule a probabilidade do tempo médio despendido no facebook, por dia, ser superior a 4 horas?

Solução: Seja X_i a variável aleatória que representa o tempo que um aluno despende no dia i no facebook, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$. $(X_1, \cdots, X_5)$ é uma amostra casual de uma população exponencial com média 2 horas, ou seja,

$$X_i \overset{iid}{\sim} Exp(1/2).$$

A probabilidade que queremos calcular é

$$P\left(\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i > 4\right) = P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i > 20\right).$$

Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{5} X_i \sim G(5, 1/2) = \chi^2(10).$$

Assim,

$$P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i > 20\right) \simeq 0.025\,(\text{tabelas})$$

Utilizando uma calculadora, podemos verificar que

$$P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i > 20\right) = 1 - F_{\chi^2(10)}(20) = 0.02925$$

(b) Qual a probabilidade de o tempo máximo despendido por dia não ultrapassar 6 horas?

Solução: Consideremos a amostra casual definida na alínea anterior: $(X_1, \cdots, X_5)$. A probabilidade que pretendemos calcular é:

$$P(\max(X_1, \cdots, X_5) \leq 6).$$

Para calcularmos a probabilidade acima podemos notar que

$$\max(X_1, \cdots, X_5) \leq 6 \Leftrightarrow X_1 \leq 6, \cdots, X_5 \leq 6.$$

Assim,

$$P(\max(X_1, \cdots, X_5) \leq 6) = \underbrace{P(X_1 \leq 6, \cdots, X_5 \leq 6) = P(X_1 \leq 6) \cdots P(X_5 \leq 6)}_{\text{esta igualdade justifica-se com a independência das v.a.}}$$

$$= F_{X_1}(6) \times \cdots \times F_{X_5}(6) = \underbrace{(1 - e^{-6/2})^5}_{\text{pois, } X_i \sim Exp(1/2)} = 0.7746$$